Chapitre 3

Espaces Vectoriels

Dans ce chapitre, $\mathbf{K}$ désignera $\mathbb{R}$, ou $\mathbb{C}$.

3.1 Espaces vectoriels

Définition 3.1.1. *: On appelle espace vectoriel sur* $\boldsymbol{K}$ *(ou* $\boldsymbol{K}$*-espace vectoriel) un ensemble non vide*$\boldsymbol{E}$ *muni d'une loi notée + et d'une autre loi notée ., noté (* $\mathbf{E}, +, .$ *), telles que :*

1) Pour tout $x, y \in \mathbf{E}$, $x + y \in \mathbf{E}$.

2) Pour tout $x, y \in \mathbf{E}$, $x + y = y + x$.

3) Pour tout $x \in \mathbf{E}$, $x + 0_{\mathbf{E}} = x$.

4) Pour tout $x \in \mathbf{E}$, $-x \in \mathbf{E}$.

5) Pour tout $x, y, z \in \mathbf{E}$, $(x + y) + z = x + (y + z)$.

6) Pour tout $\lambda \in\in \mathbf{K}$, $x \in \mathbf{E}$, $\lambda x \in \mathbf{E}$.

7) $\lambda.(\mu.x) = (\lambda\mu).x \ \forall\lambda, \mu \in \boldsymbol{K}$ *et* $\forall x \in \boldsymbol{E}$.

8) $(\lambda + \mu).x = \lambda.x + \mu.x \ \forall\lambda, \mu \in \boldsymbol{K}$ *et* $\forall x \in \boldsymbol{E}$.

9) $\lambda.(x + y) = \lambda.x + \lambda.y \ \forall\lambda \in \boldsymbol{K}$ *et* $\forall x, y \in \boldsymbol{E}$.

10) $1.x = x \ \forall x \in \boldsymbol{E}$.

Les éléments de $\mathbf{K}$ sont dits scalaires et ceux de $\mathbf{E}$ vecteurs.

Exemple 3.1.1. *:*

1) $\boldsymbol{K}$ *est un espace vectoriel sur lui même.*

2) $\mathbb{C}$ *est un espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$.

3) $\mathbb{R}$ *n'est pas un espace vectoriel sur* $\mathbb{C}$.

4) $\mathbb{R}[X]$ *est un espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$ *muni des lois :*

$(a_0+a_1X+...+a_nX^n)+(b_0+b_1X+...+b_nX^n) = (a_0+b_0)+(a_1+b_1)X+ ... + (a_n+b_n)X^n$ *et* $\lambda(a_0+a_1X+...+a_nX^n) = \lambda a_0 + \lambda a_1 X + ... + \lambda a_n X^n$.

5) Soit $\boldsymbol{E}$ *un espace vectoriel sur* $\boldsymbol{K}$*,* $\boldsymbol{A}$ *un ensemble quelconque non vide, et*

$\mathcal{S} = \{$ *applications* $f : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{E}\}$*. On peut définir sur* $\mathcal{S}$ *une structure d'espace vectoriel sur* $\boldsymbol{K}$ *par les lois :*

Si $f, g \in \mathcal{S}$ *et* $\lambda \in \boldsymbol{K}$*, alors*

$$\begin{aligned} f+g : \boldsymbol{A} &\to \boldsymbol{E} & \lambda f : \boldsymbol{A} &\to \boldsymbol{E} \\ a &\mapsto f(a)+g(a) & a &\mapsto \lambda f(a) \end{aligned}$$

6) Soient $\boldsymbol{E}_1$ *et* $\boldsymbol{E}_2$ *deux espaces vectoriels sur* $\boldsymbol{K}$*. On définit une structure d'espace vectoriel sur* $\boldsymbol{E}_1 \times \boldsymbol{E}_2$ *par :*

$(x_1, y_1)+(x_2, y_2) = (x_1+x_2, y_1+y_2)$ *et* $\lambda(x_1, y_1) = (\lambda x_1, \lambda y_1)$ *avec* $\lambda \in \boldsymbol{K}$.

D'une manière analogue, $\boldsymbol{E}_1 \times ... \times \boldsymbol{E}_n$ *est un espace vectoriel sur* $\boldsymbol{K}$ *si* $\boldsymbol{E}_1, ..., \boldsymbol{E}_n$ *le sont.*

Proposition 3.1.1. *: Pour tout* $\lambda \in \boldsymbol{K}$ *et pour tout* $x \in \boldsymbol{E}$*, on a :*

1) $\lambda.0 = 0$ *et* $0.x = 0$.

2) $\lambda x = 0 \Rightarrow \lambda = 0$ *ou* $x = 0$.

3) $(-\lambda)x = \lambda(-x) = -\lambda x$.

Preuve : 1) $\lambda(0+0) = \lambda 0 + \lambda 0 = \lambda 0 \Rightarrow \lambda 0 = 0$ et $(0+0)x = 0x+0x = 0x \Rightarrow 0x = 0$.

2) $\lambda x = 0$, si $\lambda \neq 0$ alors $\lambda^{-1}\lambda x = 0 \Rightarrow x = 0$.

3) $(\lambda + (-\lambda))x = \lambda x + (-\lambda)x = 0 \Rightarrow (-\lambda x) = -(\lambda x)$.

Dans la suite $(-\lambda)x$ sera noté $-\lambda x$ et $x+(-y)$ sera noté $x-y$.

3.2 Sous-Espaces vectoriels

Définition 3.2.1. *: Soit* $\boldsymbol{E}$ *un espace vectoriel et* $\boldsymbol{F}$ *une partie non vide de* $\boldsymbol{E}$*. On dit que* $\boldsymbol{F}$ *est un sous-espace vectoriel de* $\boldsymbol{E}$*, si la restriction des lois de* $\boldsymbol{E}$ *à* $\boldsymbol{F}$ *fait de* $\boldsymbol{F}$ *un espace vectoriel.*

Proposition 3.2.1. *: Soit* $\boldsymbol{E}$ *un espace vectoriel et* $\boldsymbol{F} \subset \boldsymbol{E}$*. Alors* $\boldsymbol{F}$ *est un sous-espace vectoriel de* $\boldsymbol{E}$ *si et seulement si :*

1) $\boldsymbol{F} \neq \emptyset$.

2) a) $x, y \in \boldsymbol{F} \Rightarrow x + y \in \boldsymbol{F}$.

b) $x \in \boldsymbol{F}$, $\lambda \in \boldsymbol{K} \Rightarrow \lambda x \in \boldsymbol{F}$.

Preuve : $\Rightarrow$) trivial.

$\Leftarrow$) $\lambda = -1$ et $y \in \mathbf{F} \Rightarrow -y \in \mathbf{F}$ d'après b) ; $x \in \mathbf{F} \Rightarrow x - y \in \mathbf{F}$ d'après a) ; d'où $\mathbf{F}$ est un sous-groupe de $\mathbf{E}$.

Les autres axiomes sont vérifiés pour tous les éléments de $\mathbf{E}$ et donc à fortiori pour les éléments de $\mathbf{F}$.

Proposition 3.2.2. *équivalente : $\boldsymbol{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\boldsymbol{E}$ si et seulement si :*

1) $\boldsymbol{F} \neq \emptyset$.

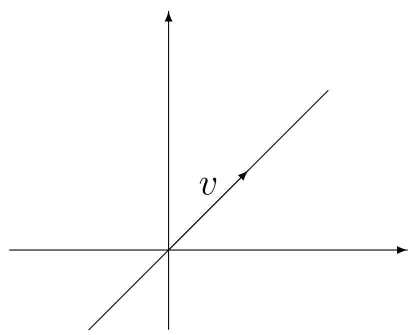
2) $x, y \in \boldsymbol{F}$; $\mu, \lambda \in K \Rightarrow \lambda x + \mu y \in \boldsymbol{F}$.

Preuve : Exercice.

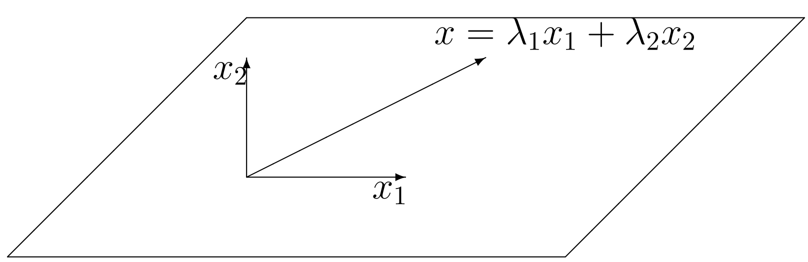
Exemple 3.2.1. *:*

1) Droite vectorielle :

Soit $\boldsymbol{E}$ un espace vectoriel et soit $v \in \boldsymbol{E}$; $v \neq 0$, alors $\boldsymbol{F} = \{y \in \boldsymbol{E} / \exists \lambda \in \boldsymbol{K}; y = \lambda v\}$ est un sous-espace vectoriel de $\boldsymbol{E}$ dit droite vectorielle engendrée par v.



2) Soient x_1, $x_2 \in \boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{F} = \{y \in \boldsymbol{E} / \exists \lambda_1, \lambda_2 \in \boldsymbol{K}; y = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2\}$, $\boldsymbol{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\boldsymbol{E}$ dit plan vectoriel engendré par x_1 et x_2.



3) $\mathbb{R}_n[X] = \{$ polynômes $P \in \mathbb{R}[X]; degP \leq n\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.

4) Soit $\boldsymbol{F} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 2x + y + 3z = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Proposition 3.2.3. *: Soient **F** et **G** deus sous-espaces vectoriels de **E**.*

*1) $\boldsymbol{F} \cap \boldsymbol{G}$ est un sous-espace vectoriel de **E**.*

*2) $\boldsymbol{F} \cup \boldsymbol{G}$ n'est pas en général un sous-espace vectoriel de **E**.*

*3) Le complément $(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{F})$ d'un sous-espace vectoriel **F** n'est pas un sous-espace vectoriel de **E**.*

Preuve : 1) $\mathbf{F} \cap \mathbf{G} \neq \emptyset$ car $0 \in \mathbf{F} \cap \mathbf{G}$.

$x, y \in \mathbf{F} \cap \mathbf{G}$ et $\lambda, \mu \in \mathbf{K} \Rightarrow (x, y \in \mathbf{F},\ \lambda, \mu \in \mathbf{K})$ et $(x, y \in \mathbf{G}, \lambda, \mu \in \mathbf{K}) \Rightarrow \lambda x + \mu y \in \mathbf{F} \cap \mathbf{G}$.

2) On prend $\mathbf{F} \not\subset \mathbf{G}$ et $\mathbf{G} \not\subset \mathbf{F}$, il existe donc $x \in \mathbf{F}$; $x \notin \mathbf{G}$ et $y \in \mathbf{G}$; $y \notin \mathbf{F}$; on a donc $x, y \in \mathbf{F} \cup \mathbf{G}$.

Si $\mathbf{F} \cup \mathbf{G}$ est un sous-espace vectoriel alors $x + y \in \mathbf{F} \cup \mathbf{G}$; c.à.d $x + y \in \mathbf{F}$ ou $x + y \in \mathbf{G}$.

Si $x + y \in \mathbf{F}$, alors $(x + y) - x \in \mathbf{F} \Rightarrow y \in \mathbf{F}$; contradiction.

Si $x + y \in \mathbf{G}$, alors $(x + y) - y \in \mathbf{G} \Rightarrow x \in \mathbf{G}$; contradiction.

3) Le complément $(\mathbf{E} - \mathbf{F})$ ne contient pas 0, donc n'est pas un sous-espace vectoriel.

3.3 Famille Génératrice

Définition 3.3.1. *: Une famille de vecteurs $\{v_1, ...v_p\}$ d'un espace vectoriel **E** est dite génératrice si : $\forall x \in \boldsymbol{E}$, $\exists \lambda_1, ..., \lambda_p \in \boldsymbol{K}$ tel que $x = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_p v_p$, on dit que tout $x \in \boldsymbol{E}$ est combinaison linéaire des vecteurs v_i.*

Remarque 3.3.1. *: Une telle famille (finie) n'existe pas toujours. Considérons $\mathbb{R}[X]$ et $\{P_1, ..., P_p\}$ une famille finie de polynômes, elle ne peut pas être génératrice, car par combinaisons linéaires, on n'obtiendra que des polynômes de degré$\leq$Sup(deg P_i).*

Par contre pour $\mathbb{R}_n[X]$, la famille $\{1, X, ..., X^n\}$ est une famille génératrice.

Exemple 3.3.1. *:*

1) Dans $\mathbb{R}^2$, $\{(1,0);(0,1)\}$ *est une famille génératrice.*

2) Dans $\mathbb{R}^2$, $\{(1,0);(0,1);(1,2)\}$ *est une famille génératrice.*

3) Dans $\mathbb{R}^2$, $\{(1,1);(1,-1)\}$ *est une famille génératrice.*

4) Dans $\mathbb{R}^n$, $\{(1,0,...,0);...;(0,...,0,1)\}$ *est une famille génératrice.*

Définition 3.3.2. *: Un espace vectoriel est dit de dimension finie, s'il existe une famille génératrice finie, dans le cas contraire, on dit qu'il est de dimension infinie.*

Exemple 3.3.2. *:*

1) $\mathbb{R}^n$ *et* $\mathbb{R}_n[X]$ *sont de dimension finie.*

2) $\mathbb{R}[X]$ *est de dimension infinie.*

3) L'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs $v_1,...,v_p$ *noté* $\overline{\{v_1,...,v_p\}}$ *ou* $\langle v_1,...,v_p\rangle$ *est un sous-espace vectoriel de* $\boldsymbol{E}$ *de dimension finie.*

3.4 Dépendance et Indépendance Linéaires - Bases

Définition 3.4.1. *: Soit* $v_1,...,v_p$ *une famille finie d'éléments de* $\boldsymbol{E}$*. On dit qu'elle est libre si :* $\lambda_1 v_1+...+\lambda_p v_p=0 \Rightarrow \lambda_1=...=\lambda_p=0$.

On dit aussi que les vecteurs $v_1,...,v_p$ *sont linéairement indépendants.*

Une famille qui n'est pas libre, est dite liée (on dit aussi que ses vecteurs sont liés ou linéairement dépendants).

Exemple 3.4.1. *:*

1) Dans $\mathbb{R}^3$*, les vecteurs* $v_1=(1,2,1)$ *;* $v_2=(-1,3,1)$ *et* $v_3=(-1,13,5)$ *sont liés car* $2v_1+3v_2-v_3=0$.

2) Dans $\mathbb{R}^3$*, les vecteurs* $v_1=(1,1,-1)$ *;* $v_2=(0,2,1)$ *et* $v_3=(0,0,5)$ *sont linéairement indépendants.*

Proposition 3.4.1. *: Une famille* $\{v_1,...,v_p\}$ *est liée si et seulement si l'un au moins des vecteurs* v_i *s'écrit comme combinaison linéaire des autres vecteurs de la famille.*

Preuve : $\Rightarrow$) $\exists\lambda_1,...,\lambda_p$ non tous nuls tels que $\lambda_1 v_1+...+\lambda_p v_p=0$, si $\lambda_i\neq 0$, alors

$v_i=\frac{-\lambda_1}{\lambda_i}v_1+...+\frac{-\lambda_{i-1}}{\lambda_i}v_{i-1}+\frac{-\lambda_{i+1}}{\lambda_i}v_{i+1}...+\frac{-\lambda_p}{\lambda_i}v_p$

$\Leftarrow$) $\exists v_i$ tel que $v_i = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_{i-1}v_{i-1} + \alpha_{i+1}v_{i+1} + ... + \alpha_p v_p$
c.à.d $\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_{i-1}v_{i-1} - v_i + \alpha_{i+1}v_{i+1} + ... + \alpha_p v_p = 0$.

Proposition 3.4.2. *: Soit $\{v_1, ..., v_p\}$ une famille libre et x un vecteur quelconque de l'espace engendré par les v_i (c.à.d x est combinaison linéaire des v_i), alors la décomposition de x sur les v_i est unique.*

Preuve : $x = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_p v_p = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_p v_p \Rightarrow (\alpha_1 - \lambda_1)v_1 + ... + (\alpha_p - \lambda_p)v_p = 0 \Rightarrow \lambda_i = \alpha_i \ \forall i = 1, ..., p$.

Définition 3.4.2. *: On appelle base une famille à la fois libre et génératrice.*

Proposition 3.4.3. *: Soit $\{v_1, ..., v_n\}$ une base de $\boldsymbol{E}$. Tout $x \in \boldsymbol{E}$ se décompose d'une façon unique sur les v_i, c.à.d $\forall x \in \boldsymbol{E}\ \exists!(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \boldsymbol{K}^n$ tel que $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$.*

Preuve : Proposition précédente.

Proposition 3.4.4. *: Soit $\mathcal{B} = \{v_1, ..., v_n\}$ une base de $\boldsymbol{E}$. Il existe alors une bijection :*

$$\begin{array}{rcll} \varphi_{\mathcal{B}} & : & \boldsymbol{E} & \longrightarrow \boldsymbol{K}^n \\ & & x = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i & \longmapsto (x_1, ..., x_n) \end{array}$$

Les scalaires x_i sont dits composantes de x dans la base $\mathcal{B} = \{v_1, ..., v_n\}$.

Exemple 3.4.2. *:*

1) Base canonique de $\boldsymbol{K}^n$, $\{e_k = (0, ..., \underset{\uparrow}{\overset{k^{\grave{e}me}rang}{1}}, 0...0)/k = 1, ..., n\}$.

2) Base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$, $\{1, X, ..., X^n\}$.

3) Soit $\boldsymbol{F} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3/2x + y + 3z = 0\}$. $\boldsymbol{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

On a $v = (x, y, z) \in \boldsymbol{F} \Leftrightarrow y = -2x - 3z$ donc $v \in \boldsymbol{F} \Leftrightarrow v = (x, -2x - 3z, z) = x(1, -2, 0) + z(0, -3, 1)$, donc $(1, -2, 0)$ et $(0, -3, 1)$ engendrent $\boldsymbol{F}$. On vérifie qu'ils forment une famille libre, donc c'est une base de $\boldsymbol{F}$.

Proposition 3.4.5. *: 1) $\{x\}$ est une famille libre $\Leftrightarrow x \neq 0$.*

2) Toute famille contenant une famille génératrice est une famille génératrice.

3) Toute sous-famille d'une famille libre est libre.

4) Toute famille contenant une famille liée est liée.

5) Toute famille $\{v_1, ..., v_n\}$ dont l'un des vecteur v_i est nul, est liée.

Preuve : 1) $\Rightarrow$) Si $x = 0$ alors $\lambda x = 0$ pour tout λ d'où $\{x\}$ est liée.

$\Leftarrow$) $\lambda x = 0 \Rightarrow \lambda = 0$ car $x \neq 0$.

2) Soit $\{v_1, ..., v_p\}$ une famille génératrice et $\{v_1, ..., v_p, w_1, ..., w_q\}$ une sur-famille. Alors $\forall x \in \mathbf{E}$, $x = \sum_{i=1}^{i=p} \lambda_i v_i = \sum_{i=1}^{i=p} \lambda_i v_i + 0w_1 + ... + 0w_q$.

3) Soit $\mathcal{F} = \{v_1, ..., v_p\}$ une famille libre et $\mathcal{F}'$ une sous-famille de $\mathcal{F}$, quitte à changer la numérotation $\mathcal{F}' = \{v_1, ..., v_k\}$ avec $k \leq p$.

Si $\mathcal{F}'$ est liée, l'un des v_i serait combinaison linéaire des autres.

4) Soit $\mathcal{F} = \{v_1, ..., v_p\}$ et $\mathcal{G} = \{v_1, ..., v_p, w_1, ..., w_q\}$, l'un des vecteurs v_i est combinaison linéaires des autres vecteurs de $\mathcal{F}$, d'où de $\mathcal{G}$, d'où $\mathcal{G}$ est liée.

5) $\{0\}$ étant liée, toute sur-famille est liée.

3.5 Existence de Bases (en dimension finie)

Théorème 3.5.1. *: Dans un espace vectoriel $\boldsymbol{E} \neq \{0\}$ de dimension finie, il existe toujours des bases.*

Preuve : Soit $\mathcal{G} = \{v_1, ..., v_p\}$ une famille génératrice. Pour tout $x \in \mathbf{E}$, il existe $\alpha_1, ..., \alpha_p \in \mathbf{K}$ tels que $x = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_p v_p$.

a) Si tous les v_i étaient nuls $\mathbf{E} = \{0\}$ ce qui est exclu. Quitte à changer de numérotation on peut supposer $v_1 \neq 0$.

b) $\mathbf{L}_1 = \{v_1\}$ est une famille libre, si elle était génératrice, stop.

c) Supposons $\mathbf{L}_1$ non génératrice. Montrons qu'il existe $v_* \in \{v_2, ..., v_p\}$ tel que $\{v_1, v_*\}$ soit libre.

Supposons le contraire ; c.à.d v_1 est lié à chacun des v_i, $i = 2, ..., p$, d'où $\exists \lambda_2, ..., \lambda_p$; $v_2 = \lambda_2 v_1$, $v_3 = \lambda_3 v_1$,..., $v_p = \lambda_p v_1$, alors

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^{i=p} \alpha_i v_i \\ &= \alpha_1 v_1 + \sum_{i=2}^{i=p} \alpha_i \lambda_i v_1 \\ &= (\alpha_1 + \sum_{i=2}^{i=p} \alpha_i \lambda_i) v_1 \end{aligned}$$

ce qui entraîne $\{v_1\}$ génératrice de $\mathbf{E}$, faux.

La famille $\mathbf{L}_2 = \{v_1, v_*\}$ est donc libre, en changeant éventuellement de notation, on peut supposer $v_* = v_2$.

d) Si $\mathbf{L}_2 = \{v_1, v_2\}$ est génératrice, stop.

Supposons le contraire. En répétant le même raisonnement que précedemment, on voit qu'il existe $v_* \in \{v_3, ..., v_p\}$ tel que la famille $\mathbf{L}_3 = \{v_1, v_2, v_*\}$ est libre. On construit ainsi une suite :

$$\mathbf{L}_1 \subsetneq \mathbf{L}_2 \subsetneq \mathbf{L}_3 \subsetneq ... \subset \mathcal{G}$$

de famille libres et le processus peut être continué tant que $\mathbf{L}_k$ n'est pas génératrice. Mais $\mathcal{G}$ est une famille finie et par conséquent le processus doit s'arrêter, éventuellement pour $\mathbf{L}_k = \mathcal{G}$. Il existe donc une famille $\mathbf{L}_k$ libre et génératrice.

Cette démonstration nous permet d'obtenir une autre version du théorème précédent.

Théorème 3.5.2. *: Soit $\boldsymbol{E} \neq \{0\}$ un espace vectoriel de dimension finie, alors :*

1) De toute famille génératrice on peut extraire une base.

2) (Théorème de la base incomplète). Toute famille libre peut être complétée de manière à former une base.

3.6 Les Théorèmes Fondamentaux sur la Dimension

Théorème 3.6.1. *: Dans un espace vectoriel engendré par n éléments, toute famille de plus de n éléments est liée.*

Preuve : Soit $\mathcal{F} = \{v_1, ..., v_n\}$ une famille génératrice et $\mathcal{F}' = \{w_1, ..., w_m\}$ une famille de vecteurs ($m > n$). Montrons que $\mathcal{F}'$ est liée.

1) Si l'un des $w_i = 0$, $\mathcal{F}'$ est liée. Stop.

2) Supposons tous les w_i non nuls, $w_1 = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n$, $w_1 \neq 0 \Rightarrow \exists \alpha_i \neq 0$, quitte à changer la numérotation, supposons $\alpha_1 \neq 0$ d'où $v_1 = \frac{1}{\alpha_1} w_1 - (\frac{\alpha_2}{\alpha_1} v_2 + ... + \frac{\alpha_n}{\alpha_1} v_n)$.

Pour $x \in \mathbf{E}$, $x = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n$, en remplaçant v_1 par son expression, on constate que x est combinaison linéaire de w_1, v_2,...,v_n, d'où $\{w_1, v_2, ..., v_n\}$ est génératrice.

Considérons w_2, $w_2 = \beta_1 w_1 + \beta_2 v_2 + ... + \beta_n v_n$. Si $\beta_2 = \beta_3 = ... = \beta_n = 0$, alors $w_2 = \beta_1 w_1$. D'où $\mathcal{F}'$ liée. Stop.

Supposons que l'un des $\beta_i \neq 0$, pour fixer les idées disons β_2, on aura $v_2 = \frac{1}{\beta_2} w_2 - \frac{1}{\beta_2}(\beta_1 w_1 + \beta_3 v_3 + ... + \beta_n v_n)$.

En raisonnant comme ci-dessus, on voit que $\{w_1, w_2, v_3, ..., v_n\}$ est génératrice.

Ainsi de proche en proche, on arrive à remplacer v_1,...,v_n par w_1,...,w_n et $\{w_1, w_2, ..., w_n\}$ serait génératrice. En particulier, w_{n+1} serait combinaison linéaire de w_1,...,w_n et donc $\mathcal{F}'$ serait liée.

Théorème 3.6.2. *: Dans un espace vectoriel $\boldsymbol{E}$ sur $\boldsymbol{K}$ de dimension finie, toutes les bases ont même nombre d'éléments, ce nombre entier est appelé dimension de $\boldsymbol{E}$ sur $\boldsymbol{K}$ et est noté $dim_{\boldsymbol{K}}\boldsymbol{E}$.*

Preuve : Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases. Si $\mathcal{B}'$ avait plus d'éléments que $\mathcal{B}$ elle ne serait pas libre car $\mathcal{B}$ est génératrice.

Corollaire 3.6.1. *: Dans un espace vectoriel de dimension finie n, toute famille de plus de n éléments est liée, et une famille de moins de n éléments ne peut être génératrice.*

Preuve : Pour le $2^{ème}$ point, si la famille était génératrice, on pourrait en extraire d'après un théorème du paragraphe 5, une base qui aurait moins de n éléments.

Exemple 3.6.1. *:*

1) Si $\boldsymbol{E} = \{0\}$, on pose $dim_{\boldsymbol{K}}\boldsymbol{E} = 0$, et $\boldsymbol{E} = \{0\} \Leftrightarrow dim_{\boldsymbol{K}}\boldsymbol{E} = 0$.

2) $dim_{\boldsymbol{K}}\boldsymbol{K}^n = n$.

3) $dim_{\mathbb{R}}\mathbb{R}_n[X] = n + 1$.

5) La dimension d'un espace vectoriel dépend non seulement de $\boldsymbol{E}$ *mais aussi de* $\boldsymbol{K}$*,* $dim_{\mathbb{R}}\mathbb{C} = 2$ *et* $dim_{\mathbb{C}}\mathbb{C} = 1$*.*

Proposition 3.6.1. *: Soient* $\boldsymbol{E}_1,...,\ \boldsymbol{E}_p$ *des espaces vectoriels de dimension finie sur le même corps* $\boldsymbol{K}$*, alors* $dim_{\boldsymbol{K}}(\boldsymbol{E}_1\times...\times\boldsymbol{E}_p) = dim_{\boldsymbol{K}}\boldsymbol{E}_1+...+dim_{\boldsymbol{K}}\boldsymbol{E}_p$

Preuve : Soient $\{a_1,...,a_{n_1}\}$, $\{b_1,...,b_{n_2}\}$,..., $\{l_1,...,l_{n_p}\}$ des bases de $\mathbf{E}_1,...,\ \mathbf{E}_p$
respectivement.

La famille $\{(a_i,0,...,0)_{i=1,...,n_1},(0,b_i,0,...,0)_{i=1,...,n_2},...,$
$(0,0,...,0,l_i)_{i=1,...,n_p}\}$ est une base de $\mathbf{E}_1\times...\times\mathbf{E}_p$.

Exemple 3.6.2. *:*

$dim_{\mathbb{R}}\mathbb{C}^n = 2n$ *et* $dim_{\mathbb{C}}\mathbb{C}^n = n$*.*

Théorème 3.6.3. *: Soit* $\boldsymbol{E}$ *un espace vectoriel de dimension finie* n*. Alors*

1) Toute famille génératrice de n *éléments est une base.*

2) Toute famille libre de n *éléments est une base.*

Preuve : 1) De cette famille, on peut extraire une base, elle doit avoir n éléments, donc c'est elle même.

2) Cette famille peut être complétée pour former une base qui doit avoir n éléments, donc c'est elle même.

Théorème 3.6.4. *: Soit* $\boldsymbol{E}$ *un espace vectoriel de dimension finie et* $\boldsymbol{F}$ *un sous-espace vectoriel de* $\boldsymbol{E}$*. Alors*

1) $dim_{\boldsymbol{K}}\boldsymbol{F} \leq dim_{\boldsymbol{K}}\boldsymbol{E}$*.*

2) $dim_{\boldsymbol{K}}\boldsymbol{F} = dim_{\boldsymbol{K}}\boldsymbol{E} \Leftrightarrow \boldsymbol{E} = \boldsymbol{F}$*.*

Preuve : On pose $dim_{\mathbf{K}}\mathbf{E} = n$.

1) a) Si $dim_{\mathbf{K}}\mathbf{F} = 0$ on a $dim_{\mathbf{K}}\mathbf{F} \leq n$.

b) Si $dim_{\mathbf{K}}\mathbf{F} \neq 0$, alors $\mathbf{F} \neq \{0\}$ et donc $\mathbf{F}$ admet une base, $\mathcal{B}$, qui est une partie libre de $\mathbf{F}$ donc de $\mathbf{E} \Rightarrow$ cardinal$\mathcal{B} \leq n$ d'après Corollaire 3.6.1.

2) $\Leftarrow$) Trivial.

$\Rightarrow$) Il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbf{F}$ ayant n éléments, elle est donc libre dans $\mathbf{F}$ et par suite dans $\mathbf{E}$, elle est donc base de $\mathbf{E}$; théorème 2.6.3, donc famille génératrice de $\mathbf{E}$, donc $\mathbf{E} = \mathbf{F}$.

3.7 Somme, Somme directe, Sous-Espaces Supplémentaires

Définition 3.7.1. *: Soient $\boldsymbol{E}_1$, $\boldsymbol{E}_2$ deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel $\boldsymbol{E}$. On appelle somme de $\boldsymbol{E}_1$ et $\boldsymbol{E}_2$ le sous-espace de $\boldsymbol{E}$ défini par :*

$\boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2 = \{x \in \boldsymbol{E} / \exists x_1 \in \boldsymbol{E}_1, x_2 \in \boldsymbol{E}_2 ; x = x_1 + x_2\}$.

$\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{E}$, en effet

$\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2 \subset \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$ donc $\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 \neq \emptyset$.

$\alpha, \beta \in \mathbf{K}$ et $x, y \in \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 \Rightarrow \exists x_1 \in \mathbf{E}_1, x_2 \in \mathbf{E}_2$ et $y_1 \in \mathbf{E}_1, y_2 \in \mathbf{E}_2$; $x = x_1 + x_2$ et $y = y_1 + y_2$ d'où $\alpha x + \beta y = \underbrace{\alpha x_1 + \beta y_1}_{\in \mathbf{E}_1} + \underbrace{\alpha x_2 + \beta y_2}_{\in \mathbf{E}_2} \in \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$.

Proposition 3.7.1. *: Soient $\boldsymbol{E}_1$ et $\boldsymbol{E}_2$ deux sous-espaces vectoriels de $\boldsymbol{E}$ et $\mathcal{G} = \boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2$. La décomposition de tout élément de $\mathcal{G}$ en somme d'un élément de $\boldsymbol{E}_1$ et d'un élément de $\boldsymbol{E}_2$ est unique si et seulement si $\boldsymbol{E}_1 \cap \boldsymbol{E}_2 = \{0\}$. On écrit alors $\mathcal{G} = \boldsymbol{E}_1 \bigoplus \boldsymbol{E}_2$, et on dit que $\mathcal{G}$ est somme directe de $\boldsymbol{E}_1$ et $\boldsymbol{E}_2$.*

Preuve : $\Rightarrow$) Soit $x \in \mathbf{E}_1 \cap \mathbf{E}_2 \Rightarrow x = x + 0 = 0 + x$ d'où la non unicité.

$\Leftarrow$) Supposons $x = x_1 + x_2 = y_1 + y_2 \Rightarrow x_1 - y_1 = y_2 - x_2 \in \mathbf{E}_1 \cap \mathbf{E}_2 \Rightarrow x_1 = y_1$ et $x_2 = y_2$.

Définition 3.7.2. *: Soit $\boldsymbol{E}$ un espace vectoriel et $\boldsymbol{E}_1$, $\boldsymbol{E}_2$ deux sous-espaces vectoriels de $\boldsymbol{E}$. On dit que $\boldsymbol{E}_1$ et $\boldsymbol{E}_2$ sont supplémentaires (ou que $\boldsymbol{E}_2$ est un supplémentaire de $\boldsymbol{E}_1$) si $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_1 \bigoplus \boldsymbol{E}_2$, c.à.d $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2$ et $\boldsymbol{E}_1 \cap \boldsymbol{E}_2 = \{0\}$.*

Proposition 3.7.2. *: Soit $\boldsymbol{E}$ un espace vectoriel de dimension finie. Alors $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_1 \bigoplus \boldsymbol{E}_2$ si et seulement si pour toute base $\mathcal{B}_1$ de $\boldsymbol{E}_1$ et toute base $\mathcal{B}_2$ de $\boldsymbol{E}_2$, $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ est une base de $\boldsymbol{E}$.*

Preuve : $\Rightarrow$) Soit $\mathcal{B}_1 = \{v_1, ..., v_p\}$, $\mathcal{B}_2 = \{v_{p+1}, ..., v_q\}$ des bases de $\mathbf{E}_1$ et $\mathbf{E}_2$, respectivement. Alors tout $x \in \mathbf{E}$ s'écrit de manière unique sous la forme $x = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_p v_p + \lambda_1 v_{p+1} + ... + \lambda_{q-p} v_q \Rightarrow \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ est une base de $\mathbf{E}$.

$\Leftarrow$)

$$x = \underbrace{\sum_{i=1}^{p} \alpha_i v_i}_{\in \mathbf{E}_1} + \underbrace{\sum_{j=1}^{q-p} \lambda_j v_{p+j}}_{\in \mathbf{E}_2} \in \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$$

la décomp osition étant unique suivant les bases de E et $\Rightarrow \mathrm{E}_1 \cap \mathrm{E}_2 = \{0\}$.

Corollaire 3.7.1. *: Soit $\boldsymbol{E}$ un espace vectoriel. Pour tout sous-espace vectoriel $\boldsymbol{E}_1$, il existe toujours un supplémentaire ; le supplémentaire de $\boldsymbol{E}_1$ n'est pas unique, mais si $\boldsymbol{E}$ est de dimension finie, tous les supplémentaires de $\boldsymbol{E}_1$ ont même dimension.*

Preuve : On expose la démonstration en dimension finie.

Soit $\{v_1, ..., v_p\}$ une base de $\mathbf{E}_1$ et soit $n = dim_{\mathbf{K}}\mathbf{E}$, d'après le théorème de la base incomplète, il existe $w_{p+1}, ..., w_n$ tels que $\{v_1, ..., v_p, w_{p+1}, ..., w_n\}$ soit une base de $\mathbf{E}$. En posant $\mathbf{E}_2 = \overline{\{w_{p+1}, ..., w_n\}}$, le sous-espace de $\mathbf{E}$ engendré par $\{w_{p+1}, ..., w_n\}$, on obtient un supplémentaire de $\mathbf{E}_1$ dans $\mathbf{E}$. Puisque le choix des w_i n'est pas unique, le supplémentaire de $\mathbf{E}_1$ n'est pas unique ; cependant tous les supplémentaires de $\mathbf{E}_1$ ont une dimension égale à $n - p$, p étant la dimension de $\mathbf{E}_1$.

Théorème 3.7.1. *: Soit $\boldsymbol{E}$ un espace vectoriel de dimension finie. Alors $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_1 \bigoplus \boldsymbol{E}_2$ si et seulement si :*

1)$\boldsymbol{E}_1 \cap \boldsymbol{E}_2 = \{0\}$.

2) $dim_{\boldsymbol{K}}\boldsymbol{E} = dim_{\boldsymbol{K}}\boldsymbol{E}_1 + dim_{\boldsymbol{K}}\boldsymbol{E}_2$.

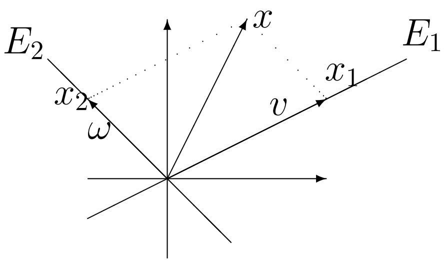
Preuve : $\Rightarrow$) D'après la proposition 2.7.2.

$\Leftarrow$) Soit $\{v_1, ..., v_p\}$ une base de $\mathbf{E}_1$ et $\{w_{p+1}, ..., w_n\}$ une base de $\mathbf{E}_2$, n étant la dimension de $\mathbf{E}$. Montrons que l'union des bases est libre :

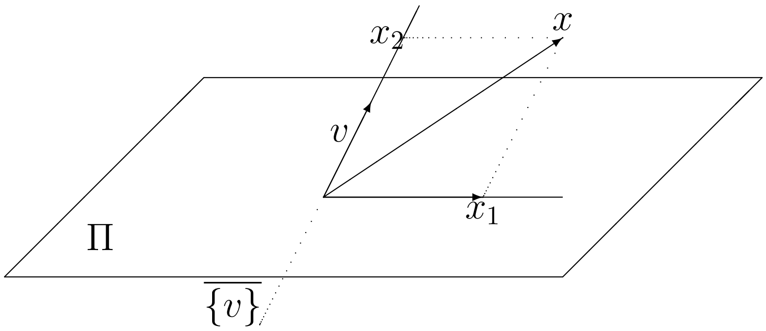
$\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_p v_p + \alpha_{p+1} w_{p+1} + ... + \alpha_n w_n = 0 \Rightarrow \underbrace{\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_p v_p}_{\in \mathbf{E}_1} = -\underbrace{(\alpha_{p+1} w_{p+1} + ... + \alpha_n w_n)}_{\in \mathbf{E}_2} \Rightarrow \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_p v_p = 0$ et $\alpha_{p+1} w_{p+1} + ... + \alpha_n w_n = 0 \Rightarrow \alpha_{p+j} = \lambda_i = 0 \ \forall i = 1, ..., p$ et $\forall j = 1, ..., n - p$, d'après la proposition précedente $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 \bigoplus \mathbf{E}_2$.

Exemple 3.7.1. *:*

1) Dans $\mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{E}_1 = \overline{\{v\}}$ et $\boldsymbol{E}_2 = \overline{\{w\}}$ où v et w sont deux vecteurs indépendants.



2) Dans $\mathbb{R}^3$, soit Π un plan vectoriel et $v \notin \Pi$. On a $\mathbb{R}^3 = \Pi \bigoplus \overline{\{v\}}$ car si $\{e_1, e_2\}$ est une base de Π, alors $\{e_1, e_2, v\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.



3) $\boldsymbol{E} = \mathbb{R}_n[X]$, $\boldsymbol{E}_1 = \mathbb{R}$, $\boldsymbol{E}_2 = \{XP(X)/P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]\}$, $\boldsymbol{E}_1 \cap \boldsymbol{E}_2 = \{0\}$ et $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2$ d'où $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_1 \bigoplus \boldsymbol{E}_2$.

Proposition 3.7.3. *: Soit $\boldsymbol{E}$ un espace vectoriel de dimension finie et $\boldsymbol{E}_1$, $\boldsymbol{E}_2$ deux sous-espaces vectoriels de $\boldsymbol{E}$. On a $dim(\boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2) = dim\boldsymbol{E}_1 + dim\boldsymbol{E}_2 - dim(\boldsymbol{E}_1 \cap \boldsymbol{E}_2)$. En particulier*
$dim(\boldsymbol{E}_1 \bigoplus \boldsymbol{E}_2) = dim\boldsymbol{E}_1 + dim\boldsymbol{E}_2$.

Preuve : Posons $dim\mathbf{E}_1 = p$, $dim\mathbf{E}_2 = q$ et $dim(\mathbf{E}_1 \cap \mathbf{E}_2) = r$ $(r \leq p, q)$.

Considérons $\{a_1, ..., a_r\}$ une base de $\mathbf{E}_1 \cap \mathbf{E}_2$ qu'on complète pour obtenir
$\{a_1, ..., a_r, b_{r+1}, ..., b_p\}$ une base de $\mathbf{E}_1$,
$\{a_1, ..., a_r, e_{r+1}, ..., e_q\}$ une base de $\mathbf{E}_2$.

Tout vecteur de $\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$ s'écrit en fonction des a_i, b_j et e_k, $1 \leq i \leq r$, $r+1 \leq j \leq p$ et $r+1 \leq k \leq q$, qui forment alors une famille génératrice de $\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$. Elle est aussi libre car :

$$\underbrace{(\alpha_1 a_1 + ... + \alpha_r a_r)}_{=x \in \mathbf{E}_1 \cap \mathbf{E}_2} + \underbrace{(\beta_{r+1} b_{r+1} + ... + \beta_p b_p)}_{=y \in \mathbf{E}_1} + \underbrace{(\gamma_{r+1} e_{r+1} + ... + \gamma_q e_q)}_{=z \in \mathbf{E}_2} = 0$$

On a $x+y+z=0 \Rightarrow \underbrace{z}_{\in \mathbf{E}_2} = \underbrace{-(x+y)}_{\in \mathbf{E}_1} \Rightarrow z \in \mathbf{E}_1 \cap \mathbf{E}_2 \Rightarrow z$ s'exprime en fonction des a_i d'où $\gamma_{r+1}e_{r+1} + ... + \gamma_q e_q = \delta_1 a_1 + ... + \delta_r a_r$ mais $\{a_1, ..., a_r, e_{r+1}, ..., e_q\}$ est une base de $\mathbf{E}_2$ d'où $\gamma_{r+1} = ... = \gamma_q = 0 = \delta_1 = ... = \delta_r$ et on a alors $z=0 \Rightarrow x=-y$, on en déduit aussi que $\beta_{r+1} = ... = \beta_p = 0 = \alpha_1 = ... = \alpha_r$, d'où la famille est libre, d'où base de $\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$.

On en déduit

$$\begin{aligned} dim(\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2) &= r + (p-r) + (q-r) \\ &= p+q-r \\ &= dim\mathbf{E}_1 + dim\mathbf{E}_2 - dim(\mathbf{E}_1 \cap \mathbf{E}_2). \end{aligned}$$